PROCEEDINGS OF IAM, V.8, N.1, 2019, pp.43-54

ОЦЕНКА ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ СОДЕРЖАЩЕЙ ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА*

И.Ш. Джаббаров[1], Г.К. Гасанова[2], Л.Г. Исмаилова[3]

[1]Гянджинский Госуниверситет, зав. кафедрой геометрии и алгебры,
пр.Г. Алиева, 459, e-mail: ilgar_j@rambler.ru
[2]Гянджинский Госуниверситет, кафедра геометрии и алгебры,
пр.Г. Алиева, 459, e-mail: gunay.h@rambler.ru
[3]Гянджинский Госуниверситет, кафедра геометрии и алгебры,
пр.Г. Алиева, 459

Резюме. При оценке площади части поверхности, определяемой системой уравнений мы пользуемся теоремой о неявных функциях для того, чтобы параметризовать поверхность. Однако, пространство, где заданы функциональные матрицы, имеют большую размерность, чем рассматриваемые поверхности. Поэтому, после параметризации некоторые из переменных становятся функциями свободных переменных – параметров. Тогда, возникающие производные по таким параметрам имеют сложный вид, который с ростом порядка производных становится еще сложнее. В этом случае возникает вопрос о том, как избежать этих осложнений. Для этого нужно установить связь между дифференцированием по параметрам и дифференцированием по прежним независимым переменным. В работе такая связь устанавливается.

Ключевые слова: Неявные функции, функциональные матрицы, системы уравнений, дифференцирование, параметризация.

AMS Subject Classification: 58A05, 58C15, 58C35, 58K05.

1. Введение

Оценки мер различных многомерных областей возникают во многих вопросах математического анализа (см. [1-3, 5-12]). В работе [2] при оценке площади части поверхности, определяемой системой уравнений мы воспользовались теоремой о неявных функциях для того, чтобы параметризовать поверхность (в случае системы алгебраических уравнений вопрос подробно изучен в [3]). Таким путем мы оценили площадь, используя сингулярные числа некоторых функциональных матриц. Однако, пространство, где заданы эти функциональные матрицы имеют большую размерность, чем рассматриваемые поверхности. Поэтому, после параметризации некоторые из переменных становятся функциями свободных переменных – параметров. Тогда, возникающие производные по таким

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 12.03.2019

параметрам имеют сложный вид, который с ростом порядка производных становится еще сложнее.

Тогда, естественно, возникает вопрос о том, как избежать этих осложнений. Для этого нужно установит связь между дифференцированием по параметрам и дифференцированием по прежним независимым переменным. Назовем первое «внутренним дифференцированием», а второе - «внешним». Заметим, что такая связь существует, и благодаря этой связи, удается провести «итерационное улучшение» оценки, полученную в [2]. Для формулировки полученного там результата введем некоторые соглашения.

Пусть Ω ограниченная замкнутая область n –мерного пространства R^n, $n \geq 1$, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью, R- действительная прямая. Предположим, что в Ω задана r – мерная поверхность с помощью системы уравнений

$$f_j(\bar{x}) = 0,\ j = 1,...,n-r, 0 \leq r \leq n, \tag{1}$$

с непрерывно-дифференцируемыми функциями на левой части и с матрицей Якоби

$$J = J(\bar{x}) = \left\| \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right\|, \quad i = 1,...,n,\ j = 1,...,n-r,$$

имеющая, всюду в Ω, максимальный ранг.

Пусть далее, $A_0 = A_0(\bar{x})$ - другая функциональная матрица, записанная в виде

$$A_0 = A_0(\bar{x}) = \left\| f_{ij}(\bar{x}) \right\|, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq m,$$

с непрерывно-дифференцируемыми несколько раз элементами. Располагая элементы столбцов матрицы A_0 в строку

$$f_{11}(\bar{x}),..., f_{r1}(\bar{x}), f_{12}(\bar{x}),..., f_{r2}(\bar{x}),..., f_{1m}(\bar{x}),..., f_{rm}(\bar{x}),$$

возьмем транспонированную матрицу Якоби этой системы функций, обозначая ее A_1:

$$A_1 = A_1(\bar{x}) = \begin{Vmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{r1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{1m}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{rm}}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{11}}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_{r1}}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_{1m}}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_{rm}}{\partial x_n} \end{Vmatrix}.$$

Затем, элементы столбцов этой матрицы последовательно расположим в виде строки и возьмем транспонированную матрицу Якоби $A_2 = A_2(\bar{x}) = A_1'(\bar{x})$ полученной системы функций и продолжим эту процедуру до получения матрицы $A_k = A_{k-1}'(\bar{x})$ для данного $k \geq 1$. Матрица, определенная таким образом, состоит из всевозможных частных производных одного и того же порядка k элементов матрицы $A_0 = A_0(\overline{x})$ и имеет размер $n \times n^{k-1} rm$. Предположим, что $A_j(\overline{x})$ для всех рассматриваемых $j = 0,\ldots,k$ имеет в Ω максимальный ранг равный n. Обозначим $G_j(\overline{x})$ произведение последних (наименьших) r сингулярных чисел матрицы $A_j(\overline{x}), \quad j = 0,\ldots,k.$ Положим

$$E = E(H) = \{\overline{x} \in \Omega | G_0(\overline{x}) \le H\}, \; H > 0.$$

Если $\varphi_{ik}(\overline{x})$ элементы матрицы $A_j(\overline{x})$, то примем следующие обозначения

$$L_j(\overline{x}) = \left(\sum_{i,k} |\varphi_{ik}(\overline{x})|^2 \right)^{1/2},$$

$$L = \max_j \max_{x \in \Omega} L_j(\overline{x}), \quad G_j = \min_{x \in \Omega} G_j(\overline{x}), \; j = 0,\ldots,k.$$

В работе [11] получены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть Π_H обозначает часть поверхности (1) заключеную в $E(H)$ и $G_{(1)} > 0$. Предположим, что матрица Якоби системы функций некоторого столбца матрицы A_0 образует минор A_1 с максимальным модулем. Тогда, для r-мерного объема (просто площади) $\mu(\Pi_H)$ мы имеем оценку

$$\mu(\Pi_H) \le cH \cdot G_{(1)}^{-1} \cdot \tilde{\wp}^r,$$

где c обозначает некоторую постоянную (т. е. параметр, не зависящий от H) и

$$\tilde{\wp} = r^2 \log\left\{ h\left(G_{(1)}\right) h(H) h(L) \right\}, c_0 = \pi^{-r/2} \Gamma(1 + r/2).$$

Следствие. Пусть условия теоремы 1 выполнены. Тогда существует постаянная C такая, что

$$\mu(\Pi_H) \le CH \cdot G_1^{-1} \cdot \wp^r,$$

где

$$\wp = r^2 \log\{h(G_1) h(H) h(L)\}.$$

Ниже мы докажем две вспомогательные теоремы, позволяющие оценить площади специального вида поверхностей, возникающих при изучении вопросов, связанных с оценками поверхностных и тригонометрических интегралов.

Для подготовки к формулировке и доказательству наших утверждений нам нужно разбить область Ω на такие части, на каждой из которых система (1) допускала бы однозначную и однолистную разрешимость. Эти части определяются максимальными минорами матрицы Якоби J данной системы. Разобьем Ω на не более чем $t = C_n^{n-r}$ подобластей $\Omega^{(\nu)}, \nu = 1,\dots,t$, пересекающихся разве лишь частями своих границ, в каждой из которых один из миноров матрицы Якоби J, имеет, по модулю, максимальные значения среди всех миноров. В каждой подобласти вида $\Omega^{(\nu)}$ ν-й минор всюду принимает, по модулю, максимальные значения. Предположим, что *каждая подобласть* $\Omega^{(\nu)}$ *может быть представлено в виде объединения конечного числа односвязных замкнутых областей.* Следовательно, каждая подобласть $\Omega^{(\nu)}$ представляется в виде объединения $\Omega^{(\nu)} = \bigcup_{c \le T_0} \Omega(\nu, c)$, где $\Omega(\nu, c)$ - односвязные подобласти.

Рассмотрим произвольно выбранную подобласть $\Omega(\nu, c)$. В ней система допускает, в некоторой окрестности произвольно выбранного решения системы (1), однозначную разрешимость *по одним и тем же переменным.* Предположим, далее, что в каждой подобласти система допускает не более чем F листов разрешимости. Итак, область $\Omega(\nu, c)$ можно разбить на не более чем F подобластей $\Delta_\mu, \mu = 1,\dots,f, f \le F$, в каждой из которых система (1) допускает однолистную разрешимость относительно, скажем первых $n-r$ переменных. Пусть $\bar{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_r)$- вектор свободных переменных. Тогда, каждую переменную x_i ($i = 1,\dots,n-r$) можно представить как функцию $x_i = x_i(\bar{\xi})$ от свободных переменных. Обозначим $A_0(\bar{\xi})$ матрицу, получаемую от матрицы $A_0(\bar{x})$ заменой переменных x_i на функции $x_i = x_i(\bar{\xi})$. Другими словами, мы рассматриваем функциональную матрицу A_0 как матричную функцию от $\bar{\xi}$. Обозначим $G_{(1)}$ минимальное значение определителя Грама градиентов элементов $A_0(\bar{\xi})$ (дифференцирование проводится по $\bar{\xi}$), т. е. $G_{(1)} = \min\det\left(A_{1\bar{\xi}} \cdot {}^t A_{1\bar{\xi}}\right)$. Заметим, что минимум берется по всем c и ν, и поэтому, он зависит от $\bar{\xi}$. Далее, $A_{1\bar{\xi}}$ означает матрицу размера $r \times rm$, получаемую от A_0 путем дифференцирования по $\bar{\xi}$, т. е. $A_{1\bar{\xi}} = A_0'(\bar{\xi})$. Таким образом, матрица $A_1(\bar{x})$, рассматриваемая как матрица от $\bar{\xi}$, отличается от $A_{1\bar{\xi}}$. Аналогично, при заданном $k \ge 1$ мы можем определить матрицу $A_{k\bar{\xi}} = A_k'(\bar{\xi})$. Далее, для положительного числа a ведем обозначение $h(a) = a + a^{-1}$. Очевидно, что $a \le h(a)$, $h(a^{-1}) = h(a)$ и $h(ab) \le h(a)h(b)$, при $a,b > 0$.

2. Основные результаты.

Пусть все условия наложенные выше относительно функциональных матриц $A_j(\bar{x})$ выполнены.

Теорема 2. Пусть $k \ge 1$ и $G_{(k)} > 0$. Предположим, для всех $j = 0,...,k-1$, что матрица Якоби системы функций некоторого столбца матрицы A_j образует минор матрицы $A_{j+1}(\bar{\xi})$ с максимальным модулем. Тогда, найдется постоянная C_1 такая, что для r-мерного объема (просто площади) $\mu(\Pi_H)$ имеем оценку:

$$\mu(\Pi_H) \le C_1\, FT_0 H^{1/k} G_{(k)}^{-1/k} \tilde{\wp}_k^r;$$

$$\tilde{\wp}_k = 3r^2 \log \tilde{H}; \tilde{H} = \max\left\{h(H), h\left(G_{(1)}\right),...,h\left(G_{(k)}\right), h(L)\right\},$$

причем числа $G_{(1)},...,G_{(k)}$ определяются равенствами

$$G_{(1)} = H^{1/2} G_{(2)}^{1/2}, G_{(2)} = H^{1/3} G_{(3)}^{1/3},..., G_{(k)} = H^{1/k} G_{(k)}^{(k-1)/k}.$$

Теорема 3. Пусть $k \ge 1$ и $G_k > 0$. Тогда при условиях теоремы 2 найдется C_2 такая, что:

$$\mu(\Pi_H) \le C_2\, FT_0 H^{1/k} G_k^{-1/k} \tilde{\wp}_k^r.$$

Доказательство теоремы 2. Проведем индукцию по k. При $k = 1$ теорема 2 следует из теоремы 1. Рассмотрим переход от случая $k = 1$ к слу - чаю $k = 2$.

При доказательстве теоремы 1, мы предполагали, что $G_1(\bar{\xi}) > 0$. Дифференцирование здесь проводится по компонентам вектора $\bar{\xi}$, которые определяются из системы рассматриваемых уравнений и, поэтому, строки матрицы $A_1(\bar{\xi})$ являются линейными комбинациями строк матрицы $A_1(\bar{x})$. Теперь, мы заменим полученные оценки такими, в которых вместо подматриц матрицы $A_1(\bar{\xi})$ фигурируют подматрицы матрицы $A_1(\bar{x})$. Это даст нам возможность провести дифференцирование только по внешним независимым переменным вектора $\bar{x}$ и, тем самым, провести итерационный переход к более высоким частным производным.

Матрицу $A_1(\bar{\xi})$ можно представить в виде $D(\bar{x}) \cdot A_1(\bar{x})$, где $A_1(\bar{x})$- матрица, введенная выше, а вид матрицы $D(\bar{x})$ указан ниже. Известно, что это представление следует из теоремы о неявных функциях (см. например, [9, стр. 338], или [10, стр. 79]). Частные производные неявной функции не превосходят, по модулю, единицу, поскольку они определяются правильными дробями, в знаменателях у которых присутствуют максимальные миноры, соответствующие выбранной подобласти. $D(\bar{x})$ имеет вид:

$$D(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1,4k-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2,4k-r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \varphi_{r1} & \cdots & \varphi_{r,4k-r} \end{pmatrix} = \left(E_r \mid \Phi\right),$$

где E_r - единичная матрица порядка r, а Φ - матрица размера $r \times (n-r)$, с элементами, по модулю не превосходящими 1. Поэтому, произвольный минор, например, минор M_1, составленный из первых r столбцов матрицы $A_1(\bar{\xi})$ можно представить в виде блочного определителя

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} \left[A_1^r(\bar{x})\right] & 0 \\ -\Psi & E_{n-r} \end{vmatrix},$$

причем, матрица $A_1^r(\bar{x})$ - прямоугольная матрица, составленная из первых r столбцов матрицы $A_1(\bar{x})$, Ψ - состоит из последних $n-r$ строк матрицы $A_1^r(\bar{x})$. Выполняя элементарные преобразования над строками последнего определителя, приведем δ_1 к виду

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} \left[A_1^r(\bar{x})\right] & \Phi \\ -\Psi & E_{n-r} \end{vmatrix}, \tag{2}$$

где матрица $\left[A_1^r(\bar{x})\right]$ составлена из первых r строк матрицы $A_1^r(\bar{x})$ так, что две блоки первого столбца определителя δ_1 (после изменения знака второго) образуют матрицу $A_1^r(\bar{x})$: $A_1^r(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \left[A_1^r(\bar{x})\right] \\ \Psi \end{pmatrix}$. Обозначим Π_1' часть поверхности, попадающую в $\Omega(\nu, c)$. Разобьем Π_1' на две части: в первой выполняется условие $\sqrt{G_1(\bar{\xi})} \geq G_{(1)}$, при некотором положительном $G_{(1)}$, а в оставшейся части Π_1' имеем $\sqrt{G_1(\bar{\xi})} \leq G_{(1)}$, где $G_1(\bar{\xi}) = \det\left(A_1(\bar{\xi})A_1(\bar{\xi})^T\right)$. Обозначая через μ_1 и μ_2 площади соответствующих частей поверхности Π_1', для нашего поверхностного интеграла получаем оценку (в обозначениях работы [11]):

$$\int\limits_{\Pi_1', |\det D_0| \leq H} d\sigma \leq \mu_1 + \mu_2 \cdot \tag{3}$$

Для оценки μ_1 воспользуемся теоремой 1. Имеем: $\mu_1 \leq HG_{(1)}^{-1}\wp_1^r$, причем $\wp_1 = r^2 \log\left\{h\left(G_{(1)}\right)h\left(H\right)h\left(L\right)\right\}$.

Оценку величины μ_2 можно следующим образом свести к оценке подобной, полученной в теореме 1. Сначала выделяем область, где выполнено условие вида $\eta < \sqrt{G_1(\bar{\xi})} \le 2\eta \le G_{(1)}$ (соответствующую площадь обозначаем как $\mu_2^{(1)}$). Пусть $M_1 = M_1(\bar{\xi})$ минор матрицы $A_1(\bar{\xi})$, содержащий элементы, градиенты которых составляют максимальный минор матрицы $A_2(\bar{\xi})$. Очевидно, $|M_1| \le \sqrt{G_1(\bar{\xi})} \le 2\eta$. Далее, заменяя условие $\eta < \sqrt{G_1(\bar{\xi})} \le 2\eta$ условием $|M_1| \le 2\eta$, мы лишь увеличим рассматриваемый интеграл. Поэтому,

$$(2\eta)^{-1}\mu_2^{(1)} \le \int\limits_{\Pi_1', |M_1| \le 2\eta} \frac{1}{\sqrt{G_1\left(\bar{\xi}\right)}} d\bar{\xi} = c_0 \int\limits_{\Pi_1', |M_1| \le 2\eta} d\bar{\xi} \int\limits_{\|D_1\bar{v}\| \le 1} d\bar{v},$$

при этом интеграл на правой части берется по части произведения $\Pi_1' \times \mathbb{R}^n$, где выполняются наложенные условия на переменные, а *D₁* обозначает матрицу определителя δ_1. При каждом $\bar{x} \in \Pi_1'$, все функции, зависящие от $\bar{x}$ продолжаются, как постоянные, путем параллельного переноса на векторы из $\mathbb{R}^n$ ортогонально к поверхности Π_1'. Пусть $\pi_1'(\bar{v})$ -часть поверхности Π_1', для точек которой, при каждом $\bar{v}$, выполнены условия $|M_1| \le 2\eta$ и $\|D_1\bar{v}\| \le 1$. Поменяв порядки интегрирований, получаем:

$$(2\eta)^{-1}\mu_2^{(1)} \le 2c_0 \int\limits_{\|D_1\bar{v}\| \le 1} d\bar{v} \int\limits_{\pi_1'(\bar{v}), \eta \le |M_1| \le 2\eta} d\sigma, \qquad (4)$$

Произведем во внутреннем поверхностном интеграле замену переменных по формулам: $\bar{\beta} = D_1\bar{v}$, применяя лемму 2, [8]. Получим, в обозначениях этой леммы:

$$\int\limits_{\pi_1'(\bar{v}), \eta \le |M_1| \le 2\eta} \sqrt{G}\frac{d\sigma}{\sqrt{G}} = \int\limits_{\omega(\eta)} |\det Q| \sqrt{G}\frac{d\sigma'}{\sqrt{G'}}, \qquad (5)$$

причем, $\omega(\eta)$ - прообраз поверхности при указанном отображении,

$$G' = \det(JQ \cdot {}^tQ^tJ), \ J = A_0;$$

далее, Q обозначает матрицу Якоби произведенной замены, которая равна обратной к матрице

$$\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\bar{x}} = \frac{\partial(\beta_1, ..., \beta_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)}.$$

Как известно, строки матрицы A_0 образуют подпространство M, ортогональное к подпространству M', натянутому на строки матрицы $D(\overline{x})$. Поэтому, $R^n = M \oplus M'$ и, следовательно, элемент объема можно представить в виде $d\overline{w} = d\overline{y}d\overline{z}$. Каждый вектор $\overline{w} \in R^n$ единственным образом записывается в виде суммы векторов $\overline{y}$ и $\overline{z}$ из подпространств M и M', при этом $\left\|Q(\overline{y}+\overline{z})\right\| \le \left\|Q\overline{y}\right\| + \left\|Q\overline{z}\right\|$. Пусть $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_r$ базис, состоящий из строк матрицы A_0, $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_{n-r}$ - базис, состоящий из строк матрицы $D = D(\overline{x})$. Производя замену переменных в интеграле, приведенном ниже, по формулам $\overline{w} = {}^t W \overline{x}$, где $W = \begin{pmatrix} A_0 \\ D \end{pmatrix}$, получаем

$$\left|\det Q^{-1}\right| = c_0 \int\limits_{\left\|Q\overline{w}\right\| \le 1} d\overline{w} = c_0 \int\limits_{\left\|Q(A_0\overline{u}+D\overline{v})\right\| \le 1} \frac{1}{\sqrt{G}\sqrt{D \cdot {}^t D}} d\overline{u} d\overline{v} \ge$$

$$\ge c_0 \int\limits_{\left\|QA_0\overline{u}\right\| \le 1/2} \frac{1}{\sqrt{G}} d\overline{u} \int\limits_{\left\|QD\overline{v}\right\| \le 1/2} \frac{1}{\sqrt{D \cdot {}^t D}} d\overline{v}\,.$$

Следовательно,

$$\left|\det Q^{-1}\right| = \frac{\Gamma\left(1+n/2\right)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\left\|Q\overline{w}\right\| \le 1} d\overline{w} \ge$$

$$\ge \frac{2^{-n}\Gamma(1+n/2)}{\Gamma\left(1+r/2\right)\Gamma\left(1+(n-r)/2\right)\sqrt{D \cdot {}^t D}\sqrt{G}} \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{1}{\sqrt{\left|{}^t D^t QQD\right|}}\,.$$

Подставляя в (5) находим:

$$\int\limits_{\pi_1'(\overline{v}),\eta \le \left|M_1\right| \le 2\eta} d\sigma \le c' \int\limits_{\omega(\eta)} \sqrt{D \cdot {}^t D}\sqrt{{}^t D^t QQD} \cdot G d\sigma'\,,$$

с некоторой положительной постоянной c'. Учитывая (заметим, что элементы матрицы Φ, по модулю, не превосходят 1), что $\sqrt{D \cdot {}^t D} \le (n-r)^r, \sqrt{G} \le 1$, получаем:

$$\int\limits_{\pi_1'(\overline{v}),\eta \le \left|M_1\right| \le 2\eta} d\sigma \le (n-r)^r c' \int\limits_{\omega(\eta)} \sqrt{{}^t D^t QQD} \cdot d\sigma'\,.$$

Имеем:

$$\mu_2^{(1)} \le 4(n-r)^r c'\eta \int\limits_{\left\|D_1\overline{v}\right\| \le 1} d\overline{v} \int\limits_{\omega(\eta)} \sqrt{{}^t D^t QQD} \cdot d\sigma'\,.$$

Рассмотрим ограничение биективного отображения $\overline{\beta} = D_1\overline{v}$ на подмногообразие решений системы. Матрица QD, в каждой точке $\overline{x} \in \Pi_1'$, служащей решением системы, является матрицей Якоби обратного преобразования, т. е. ее обратная совпадает с матрицей Якоби замены переменных $\bar{\beta} = D_1 \bar{v}$, взятой по независимым переменным $\bar{\xi}$. Тогда, можно вернутся к (4), и далее, при помощи рассуждений, проведенных выше приходим к соотношению типа уже полученного выше, с заменой δ_1 на δ_2 в (2), и H на η (напомним, что градиенты элементов матрицы M_1, по выбору этой матрицы, содержат столбцы максимального минора матрицы $A_2\left(\bar{\xi}\right)$). Итак,

$$\mu_1 \le T_1 H G_{(1)}^{-1} \wp_1^{\,r}; \ \wp_1 = r^2 \log\left\{h\left(G_{(1)}\right)h\left(H\right)h\left(L\right)\right\},$$

причем, T_1 некоторая постоянная. Далее,

$$\mu_2^{(1)} \le c' T_1 \eta G_{(2)}^{-1} \wp_2^{r}; \ \wp_2 = r^2 \log\left\{h\left(G_{(1)}\right)h\left(G_{(2)}\right)h\left(L\right)\right\},.$$

Заменяя $\eta = G_{(1)}$ на $\eta/2, \eta/4, \dots$ а затем, суммируя полученные оценки, находим:

$$\mu_2 \le c'' T_1 \cdot G_{(1)} G_{(2)}^{-1} \wp_2^{r}, \qquad (6)$$

где c'' - сумма некоторого сходящегося ряда, подобного рассмотренному в [8]. Из (3-6), полагая $G_{(1)} = H^{1/2} G_{(2)}^{1/2}$, находим оценку:

$$\mu(\Pi_H) \le C_1 H^{1/2} G_{(2)}^{-1/2} \left(\wp''\right)^r;$$

$$\wp'' = 3r^2 \log H_0; H_0 = \max\left\{h\left(H\right), h\left(G_{(1)}\right), h\left(G_{(2)}\right), h\left(L\right)\right\}.$$

Таким образом, мы перешли из оценки случая $k=1$ к случаю $k=2$. Повторяя подобные рассуждения, с несущественными изменениями, мы можем, используя оценку для случая k, перейти к случаю $k+1$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Для доказательства теоремы 3 достаточно доказать, что для любого натурального k имеем неравенство $G_{(k)} \ge G_k$. По введенным обозначениям $G_{(k)} = \min\det\left(A_{k\bar{\xi}} \cdot {}^t A_{k\bar{\xi}}\right)$. Для произвольной точки $\bar{x} = \bar{x}\left(\bar{\xi}\right)$, лежащей на многообразии решений данной системы

$$\det\left(A_{k\bar{\xi}} \cdot {}^t A_{k\bar{\xi}}\right)^{-1/2} = c_0 \int\limits_{\left\|{}^t A_{k\bar{\xi}} \bar{u}\right\| \le 1} d\bar{u} = c_0' \int\limits_{\bar{x}\in\pi, \left\|{}^t A_k \bar{x}\right\| \le 1} ds,$$

где поверхностный интеграл берется по касательному пространству к поверхности в точке $\bar{x} = \bar{x}\left(\bar{\xi}\right)$. Рассматривая касательное пространство, как подпространство R^n размерности r, и взяв (см. [5, стр.148]) максимальное значение поверхностного интеграла, взятому по всем r-мерным подпространствам, мы и получим нужную оценку. Доказательство теоремы 3 завершено.

Заключение. В работе установлено, что метод итерационного улучшения оценок однократного тригонометрического интеграла при помощи высоких производных может быть обобщен для многомерного случая. При этом возникающие трудности, связанные с рассмотрением поверхностей меньшей размерности удается устранить проведением интегрирования по спектру.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hua Loo Keng On the number of solutions of Tarry`s problem. Acta Sci. Sinica, 1952, v.1, №1-pp,1-76.
2. Jabbarov I. Sh., Hasanova G. K. Estimation of areas on some surfaces defined by the system of equations. TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 10, N.2, 2019.
3. Jabbarov I. Sh. On the structure of some algebraic varieties. Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, 36 (1), 74-82 (2016). Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences.
4. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М: Высшая школа, 1999.
5. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
6. Джаббаров И.Ш. Об одном тождестве гармонического анализа и его приложениях. Докл. АН СССР, 1990, т.314, №5.
7. Джаббаров И.Ш. Об оценках тригонометрических интегралов. Тр. РАН, 1994, т.207, стр 82-92.
8. Джаббаров И. Ш. Об оценках тригонометрических интегралов. Чебышевский сборник, т. 11, вып. 1(33), 2010, стр. 85-108.
9. Джаббаров И. Ш. О показателе сходимости особого интеграла двумерной проблемы Терри. Ученые записки Орловского госуниверситета, №6(50), 2012, стр. 80-89.
10. Джаббаров И. Ш. О показателе сходимости особого интеграла многомерной проблемы Терри. Чебышевский сборник, т. 14, выпуск 2(2013) стр. 74-103.
11. Чубариков В. Н. О кратном тригонометрическом интеграле. Докл. Ан. СССР, 1976, т.227,№6,1308-1310.
12. Чубариков В. Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах. Математические заметки, т.20, №1, 1976, 61-68.
13. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. – М.: Наука, 1972.

ESTIMATION FOR THE AREA OF THE SURFACE BY USING OF SINGULAR NUMBERS OF FUNCTIONAL MATRIX CONTAINING PARTIAL DERIVATIVES OF HIGH ORDER

I.Sh. Jabbarov[1], G.K. Hasanov[2], L.G. Ismailova[3]

[1]Ganja Statae University, head of Algebra and Geometry department,
459, Haydar Aliyev avenue, e-mail: ilgar_j@rambler.ru
[2] Ganja Statae University, head of Algebra and Geometry department,
459, Haydar Aliyev avenue, e-mail: gunay.h@rambler.ru
[3] Ganja Statae University, head of Algebra and Geometry department,
459, Haydar Aliyev avenue.

ABSTRACT

We use the theorem on implicit functions for the estimation of area of the part of the surface defined by the system of equations for the parameterization of the surface. But the spaces where the functional matrices are given have a great dimension. By this reason after of parameterization some of variables stand functions depending on independent variables – parameters. Then derivatives arising over such parameters have a complicated view, which stand much more complex with the growth of the order. In this case the question to avoid such difficulties arises. For this it is necessary to establish the relation between the differentiation over parameters and the differentiation over initial variables. In the work such a connection is established.

Keywords: Implicit function, functional matricies, system of equations, differentiation, parameterisation.

References

1. Hua Loo Keng On the number of solutions of Tarry`s problem. Acta Sci. Sinica, 1952, v.1, №1-pp,1-76.
2. Jabbarov I. Sh., Hasanova G. K. Estimation of areas on some surfaces defined by the system of equations. TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 10, N.2, 2019.
3. Jabbarov I. Sh. On the structure of some algebraic varieties. Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, 36 (1), 74-82 (2016). Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences.
4. Arkhipov G. I., Sadovnichiy V. A., Chubarikov V. N. Lektsii po matematicheskomu analizu. M: Vysshaya shkola, 1999.
5. Bellman R. Vvedenie v teoriyu matrits. M.: Nauka, 1976.
6. Dzhabbarov I.Sh. Ob odnom tozhdestve garmonicheskogo analiza i ego prilozheniyakh. Dokl. AN SSSR, 1990, t.314, №5.
7. Dzhabbarov I.Sh. Ob otsenkakh trigonometricheskikh integralov. Tr. RAN, 1994, t.207, str 82-92.

8. Dzhabbarov I. Sh. Ob otsenkakh trigonometricheskikh integralov. Chebyshevskiy sbornik, t. 11, vyp. 1(33), 2010, str. 85-108.
9. Dzhabbarov I. Sh. O pokazatele skhodimosti osobogo integrala dvumernoy problemy Terri. Uchenye zapiski Orlovskogo gosuniversiteta, №6(50), 2012, str. 80-89.
10. Dzhabbarov I. Sh. O pokazatele skhodimosti osobogo integrala mnogomernoy problemy Terri. Chebyshevskiy sbornik, t. 14, vypusk 2(2013) str. 74-103.
11. Chubarikov V. N. O kratnom trigonometricheskom integrale. Dokl. An. SSSR, 1976, t.227,№6,1308-1310.
12. Chubarikov V. N. O kratnykh ratsional'nykh trigonometricheskikh summakh i kratnykh integralakh. Matematicheskie zametki, t.20, №1, 1976, 61-68.
13. Shilov G. E. Matematicheskiy analiz. Funktsii neskol'kikh veshchestvennykh peremennykh. – M.: Nauka, 1972.